**Фазовый метод**

2.3.1 Метод изображения переходных процессов в фазовом простран­стве в фазовой плоскости был введен в теорию регулирования академиком Андроновым [1,5,6,7,8]. Им был решен ряд классических задач теории регулирования, в том числе задача Вышнеградского с учетом сухого трения в регуляторе.

Метод дает возможность получить наглядную и точную кар­тину всей совокупности переходных процессов при любых начальных условиях для свободных колебаний в системах второго порядка, содержащих нелинейные элементы. Андронов решил одну из задач для уравнений третьего порядка [5]. Большое  количество задач построения «фазовых портретов» различных нелинейных систем было решено Казакевичем, Петро­вым и Улановым и рядом других авторов [1].

Хотя исследование систем второго порядка для теории регули­рования имеет ограниченный интерес, знакомство с основами ме­тода фазовой плоскости весьма полезно благодаря его исключи­тельной наглядности и изяществу.

Фазовой плоскостью называется плоскость, в которой по осям координат откладываются какие-либо две переменные,  характе­ризующие переходный процесс в системе. Наиболее часто в каче­стве таких переменных принимают отклонение регулируемой величины *х*и скорость ее изменения по времени:

                                                                .                                                (2.46)

При изображении процессов на фазовой плоскости уравнение второго порядка удобно свести к двум уравнениям первого по­рядка:

                                                                                                     (2.47)

где  и  - в общем случае нелинейные функции координат.

Чтобы изобразить переходный процесс на фазовой плоскости, из  уравнений  (2.47)  исключим  время,  для чего поделим второе уравнение на первое:

                                                    .                                         (2.48)

Мы получили нелинейное дифференциальное уравнение, общих методов точного решения которого не существует, и в каждой задаче приходится изыскивать частный метод его решения. Решением уравнения (2.48) будет некоторая функция

                                                      ,                                            (2.49)

графическое изображение которой, на фазовой плоскости назы­вается фазовой траекторией.

Как известно, каждой совокупности начальных условий , будет соответствовать свое решение и своя фазовая траектория. Фазовая плоскость для каждого уравнения покрывается множеством фазовых траекторий, однако это множество обладает весьма ценным свойством: если функции и  однозначны, то каждой точке *(х,у)*на плоскости (за исключением, может быть, ограниченного числа изолированных особых точек) соответствует только одно значение производ­ной *dy/dx.*Это означает что через каждую точку фазовой плос­кости (за исключением особых точек) проходит только одна фазовая траектория  и что фазовые траектории не пересекаются друг с другом. Данное обстоятельство и позволяет получать наглядные нечеткие «фазовые портреты» исследуемой системы, на которых ясно виден характер возможных движений, подобно тому, как с помощью магнитных силовых линий получаем наглядное пред­ставление о магнитном поле.

Однако многие нелинейности характерны тем, что при воз­растании координаты, т. е. при *,*движение происходит по одной ветви кривой, а при ее убывании, т. е. при , по дру­гой. Тогда, хотя характеристика элемента неоднозначна, па фазовой плоскости будем иметь опять-таки непересекающиеся фазовые траектории, так как области  и  разграничены осью абсцисс , которую можно при этом назвать линией переключения,поскольку на этой оси происходит пере­ходу фазовой траектории, определяемой одним уравнением, на траекторию, описываемую другим уравнением.

И лишь в том случае, если неоднозначность является более сложной, может оказаться, что в точках некоторых областей фазовой плоскости будут пересекаться несколько фазовых траек­торий. В этом случае прибегают к понятию многополюсных фазо­вых плоскостей.

Мы упомянули о том, что однозначность фазовых траекторий, проходящих через данную точку, может не иметь места в так называемых «особых точках». Эти особые точки представляют собой те точки, в которых происходит одновременное обращение в нуль функций  и :

                                                                                         (2.50)

Особые точки, определяемые решением системы уравнений (2.50), отмечены нами нулевым индексом вверху, чтобы отличить их от начальных условий , , отмечаемых нулевым индексом внизу.

Заметим, что на основании (2.47) в особых точках *dx/dt*и *dy/dt*обращаются в нуль, т. е. движение системы прекращается.  Это означает, что особые точки представляют собой точки равновесия системы. Заметим сразу же, что эти точки могут быть как реализуемыми физически, т.е. устойчивыми, так и нереализуемыми, т.е. неустойчивыми, и в неустойчивых точках возможность прекращения движения существует только формально.

Мы говорили о том, что чаще всего за координату *y* прини­мают скорость изменения координаты *х.*Тогда уравнения (2.47) принимают вид:

                                                                                                       (2.51)

Фазовые траектории при этом приобретают некоторые дополни­тельные свойства. Прежде всего, из уравнений (2.51) следует, что *х*всегда возрастает в верхней полуплоскости (где ), т. е. движение вдоль фазовой траектории при возрастании *t*происхо­дит слева направо. В нижней же полуплоскости (где ) коор­дината *х*убывает, и движение по фазовой траектории происходит справа налево.

Следующее интересное свойство вытекает из уравнения (2.48), которое в данном случае принимает вид:

                                                  .                                           (2.52)

При *у=*0, величина *dy/dx*становится бесконечно большой во всей фазовой плоскости, за исключением точек равновесия, где  *f(х, у) =*0. Это означает, что в точках пересечения фазовых траекторий с осью *х*касательные к фазовым траекториям перпен­дикулярны к оси *х.*

Хотя метод фазовых траекторий разработан применительно к нелинейным системам, однако представляет интерес сначала рассмотреть фазовые траектории колебательного линейного звена второго порядка, так как можно легко проследить получение фазовых траекторий и особых точек наиболее важных типов, которые встречаются и нелинейных системах.

2.3.2 Для наглядного представления о сложных нелинейных процессах регулирования часто прибегают к понятию фазового пространства, которое заключается в следующем. Дифференциальное уравнение замкнутой системы регулирования *n*-го порядка можно преобразовать к системе *п*дифференциальных уравнений первого порядка в виде:

                                                                           (2.53)

с начальными условиями: ,   при ,

где  *–*переменные, являющиеся искомыми функциями времени, причем *х*1может обозначать регулируемую величину, а  *–* вспомогательные переменные;

 и *–*возмущающее и задающее воздействия.

Пусть, например, в уравнениях (2.53) будет *п =*3 (система третьего порядка). Переменные *x1, х2, хз*здесь могут иметь любой физический смысл. Но условно их можно представить мы­сленно как прямоугольные координаты некоторой точки *М*,которую называют изображающей точкой                       (см. рисунок 2.5, *а*).

В реальном процессе регулирования в каждый момент времени величины имеют вполне определенные значе­ния. Это соответствует вполне определен­ному положению точки *М*в пространстве (см. рисунок 2.5, *а*). С течением времени в реальном процессе величины  определенным образом изменяются. Это соот­ветствует определенному перемещению точки *М*в пространстве по определенной траектории. Следовательно, траектория движения точки *М*может служить наглядной геометрической иллюстрацией динамического поведения системы в процессе регулирования.



Рисунок 2.5 - Прямоугольные координаты некоторой точки *М*

Точка *М*называется изображающей точкой, ее траектория назы­вается фазовой траекторией, а пространство () называ­ется фазовым пространством.

Так как производные по времени от координат точки представ­ляют проекции ее скорости на оси координат, то дифференциаль­ные уравнения системы в форме (2.53) представляют собой выражения для проекций скорости ; изображающей точки *М*(см. рисунок 2.5, *а*) на оси координат. Следовательно, по значениям правых частей уравнений (2.53) в каждый момент времени можно судить о на­правлении движения изображающей точки *М,*а вместе с тем и о поведении соответствующей реальной системы в процессе регули­рования.

Начальные условия процесса регулирования ()оп­ределяют координаты начальной точки фазовой траектории  (см. рисунок 2.5, *а*).

Если переменных в уравнениях (2.53) будет всего две:  и (система второго порядка), то изображающая точка будет дви­гаться не в пространстве, а на плоскости (фазовая плоскость).

Если переменных будет любое число  (система *п-го*по­рядка), то фазовое пространство будет не трехмерным, а -мерным.

Итак, фазовое пространство и фазовые траектории представ­ляют собой лишь геометрический образ динамических процессов, протекающих в системе. В этом геометрическом представлении участвуют координаты и исключено время. Фазовая траектория сама по себе дает лишь качественное представление о харак­тере поведения системы. Чтобы определить количественно поло­жение изображающей точки (а значит, и состояние системы) в любой момент времени, нужно найти решение заданных дифферен­циальных уравнений (2.53) во времени.

Если уравнения (2.53) составлены в отклонениях от устано­вившегося состояния, то последнее характеризуется значениями . Следовательно, изображением установив­шегося состояния системы является начало координат фазового пространства.

Отсюда вытекает, что фазовые траектории устойчивой линей­ной системы будут асимптотически приближаться к началу коорди­нат при неограниченном увеличении времени. Фазовые траекто­рии неустойчивой линейной системы будут неограниченно удалять­ся от начала координат.

Для нелинейной системы вследствие ряда особенностей про­цессов, отмечавшихся выше, фазовые траектории могут принимать самые разнообразные очертания. Если имеется асимптотическая устойчивость для определенного круга начальных условий, то все фазовые траектории, которые начинаются внутри определен­ной области *η*, окружающей начало координат фазового простран­ства (см. рисунок 2.5, *б*), будут асимптотически приближаться к началу координат. Если устойчивость неасимптотическая, то фазовые траектории, начинающиеся внутри определенной области *η* во­круг начала координат фазового пространства, могут иметь лю­бые очертания, но не будут выходить за пределы некоторой опре­деленной области *ε*, окружающей начало координат (см. рисунок 2.5, *б*).

2.3.3 Рассмотрим формулировку понятия устойчивости по Ляпунову. Невоз­мущенное движение (установившийся процесс) называется устой­чивым, если при заданной сколь угодно малой области *ε* (см. рисунок 2.5, *б)*можно найти такую область *η*, что при начальных усло­виях, расположенных внутри этой области, возмущенное движение (переходный процесс) будет таким, что изображающая точка не выйдет из области*ε* при любом сколь угодно большом значении времени *t.*

В аналитической записи формулировка понятия устойчивости по Ляпунову будет следующей. Невозмущенное движение (уста­новившийся процесс) будет устойчивым, если при заданном поло­жительном сколь угодно малом числе *ε* можно найти такое поло­жительное число *η* (зависящее от заданного значения *ε*), что при начальных условиях

                                             **;  (2.54)

решение  дифференциальных  уравнений  возмущенного движения (переходного  процесса)  удовлетворяет   неравенствам

**; 

при любом сколь угодно большом *t.*

Представим себе для этой аналитической записи геометрический образ в фазовом пространстве. Очевидно, что при ограниче­нии начальных условий по каждой координате неравенствами (2.54) получается *п* - мерный куб со стороной 2*η*, внутри которого должна лежать начальная точка фазовой траектории *М0*()*.*На фазовой плоскости (*п*= 2) он обращается в квадрат. Аналогично и второе из написанных неравенств геометрически означает, что фазовые траектории не должны выходить из куба со стороной 2*ε*.

В формулировке Ляпунова содержится требование сколь угод­ной малости указанных областей. Однако практически это опре­деление так же, как и теоремы Ляпунова, которые будут приведе­ны ниже, применяется и тогда, когда эти области имеют опреде­ленные конечные размеры.

2.3.4 Для изучения метода фазовых траекторий предварительно рассмотрим фазовые траектории для обыкновенных линейных систем. Пусть переходный процесс в некоторой системе описывается уравнением второго порядка:

                                                      .                                   (2.55)

Введем обозначение для скорости изменения отклонения регу­лируемой величины . Тогда уравнение системы (2.55) преобразуется к виду

                                                                                              (2.56)

Исключим из уравнений (2.56) время *t,*разделив первое из них на второе (при *х*и ), получим

                                                                                                 (2.57)

Решение этого дифференциального уравнения с одной произвольной постоянной определяет собой некоторое семейство интегральных кривых на фазовой плоскости (*х,у*)*,*каждая из которых соответствует одному определенному значе­нию произвольной постоянной.

Вся совокупность интегральных кривых представит собой все возможные фазовые траектории, а значит, и все возможные виды переходного процесса в данной системе автоматического регули­рования при любых начальных условиях. Рассмотрим отдельно различные случаи.

Уравнению (2.55) соответствуют корни характеристического уравнения

,

причем возможны шесть случаев:

1) корни, чисто мнимые, при , (граница устойчи­вости линейной системы);

2) корни комплексные и имеют отрицательные вещественные части при , ,  (устойчивая линейная си­стема);

3) корни комплексные и имеют положительные вещественные части при , , (неустойчивая   линейная си­стема);

4) корни, вещественные  отрицательные, при , ,  (устойчивая линейная система);

5) корни, вещественные  положительные, при , ,  (неустойчивая линейная система);

6) корни вещественные и имеют разные знаки при  (неустойчивая линейная система), в частности, один из корней будет равен нулю при  (граница устойчивости линейной системы).

Теперь рассмотрим систему автоматического управления с объектом без самовыравнивания и с приводом управляющего органа, имеющим постоянную скорость.

Уравнение объекта будет

                                                     .                                            (2.58)

Для управляющего устройства без массы и демпфера жесткой обратной связью, т.е. при  получим

                                                                                          (2.59)

где   и  – относительные изменения управляемой величины, смещения чувствительного элемента, управляющего органа, элемента обратной связи и управляющего золотника;

            – коэффициент.

Пусть привод управляющего органа имеет постоянную скорость в двух вариантах: с мгновенным переключением при переходе управляющего элемента (золотника, струйной трубки) через нейтральное положение(=0;2); с зоной нечувствительности вследствие наличия «перекрытия» золотника или струйной трубки. В первом случае уравнении привода управляющего органа будет

                                                                                          (2.60)

а во втором:

                                                     при   

                                             при                              (2.61)

Возьмем фазовую плоскость (*х,у*), приняв

                                                  ,                                       (2.62)

 Из уравнений (2.58), (2.59) и (2.62) имеем

                                             ,                            (2.63)

 Следовательно, переключения привода в первом варианте () будет иметь место

                                                                                                (2.64)

 что соответствует прямой АВ (см. рисунок 2.6, *а*) на фазовой плоскости, причем согласно (2.63) значением  соответствует часть плоскости слева от прямой АВ, а  - справа.

На основании первого из соотношений (2.63) с учетом (2.60) при  получаем

                                                                                              (2.65)

а из (2.62) определится

                                                                                                               (2.66)

откуда находим уравнения фазовых траекторий

                                                                                                        (2.67)

или после интегрирования будет



Это есть семейство парабол, показанное на рисунке 2.6, *а* справа от линии АВ (они симметричны относительно оси *х*). Так как (2.65) и (2.66) являются проекциями скорости , изображающей точки М на оси *х*и *у*, то имеем , а знак совпадает со знаком *у*.

В соответствии с этим на рисунке 2.6, *а* укажем стрелочками направление движения изображающей точки *М* по фазовым траекториям. Аналогичным путем легко строятся параболы слева от прямой АВ.



Рисунок 2.6 – Картина общего расположения фазовых траекторий на фазовой плоскости включающая нелинейность релейного типа с зоной нечувствительности

В результате, как видно из общего расположения фазовых траекторий на фазовой плоскости (см. рисунок 2.6, *а*), получается устойчивая система с затухающим колебательным переходным процессом. Но число колебаний будет конечным. В самом деле, здесь имеется особый отрезок CD, в который вливаются все фазовые траектории, чтобы выявить поведение системы на этом отрезке, вспомним, что для него согласно (2.62) и (2.64)   или    

Следовательно, попав на отрезок CD, изображающая точка не может с него уйти, и система будет апериодически приближаться к установившемуся состоянию, т.е. изображающая точка будет «сползать» по отрезку CD к началу координат 0. Таким образом, имевший место вначале колебательный переходный процесс после конечного числа колебаний вырождается в этот, так называемый, скользящий процесс.

Крайние точки особого отрезка CD  определяются, очевидно, как точки, в которых прямая АВ касается одной из парабол соответственно правого и левого семейств. Поэтому, подставив значения из (2.64) в выражение (2.67), найдем точку *С*:  

По найденной картине расположения фазовых траекторий можно качественно представить себе кривую переходного процесса  при любых начальных условиях. Начальными условиями определяется начальное положение изображающей точки *М* и тем самым – определенная фазовая траектория, иллюстрирующая протекание процесса. Она показывает            (см. рисунок 2.6, *а*) максимальное отклонение управляемой величины , максимальную скорость , а также все последующие отклонения, число колебаний и т.п.

Рассмотрим теперь ту же систему, но с учетом зоны нечувствительности. В этом случае переключениям привода (при и ) на фазовой плоскости соответствуют согласно (2.63) две наклонные прямые (см. рисунок 2.6, *б*):  и   

Между этими прямыми , правее их , левее их  (причем ).

При  из (2.61), (2.63) и (2.61) получаем

,     

откуда (при )

   или    

(прямые, параллельные оси х в полосе АВ на рисунке 2.6, *б*).

При получим прежние параболы. В результате снова система оказывается устойчивой и имеет колебательный переходный процесс, но вместо особой точки 0 получаем особый отрезок (у=0, ), т.е. установившееся состояние определяется неоднозначно. Это соответствует тому, что система может находиться в равновесии в любом месте внутри зоны нечувствительности. Здесь точно так же возможен скользящий процесс, как и в случае изображенном на рисунке 2.6, *а*.

Пример 1. Осциллятор с сухим трением[5]. Сила сухого трения *f*направлена навстречу движению и постоянна по величине. Обозначая через *т –*массу осциллятора, через *с –* жесткость пружины, имеем:

,   *х'*< 0,

,   *х'*>0.

Если в некоторый момент *х' =*0 и сила пружины по модулю не превышает силы трения, то осциллятор будет находиться в покое, удерживаясь силой трения: *х*= const, *х'*= 0, |*сх*|<*f*тр.

Обозначив , , получим уравнения осциллятора в следующем виде:

                                             ,     *х'*< 0;                                 (2.68)

                                            *х=const*,   *х' =0*,   | *х*|<ε;                              (2.69)

                                               ,    *х' >*0.                                 (2.70)

 Уравнение (2.68) говорит о том, что в нижней фазовой полуплоскости *(х' <*0) фазовые траектории представляют собой половинки концентрических эллипсов, центр которых находится в точке *+ε* на вещественной оси. Из уравнения (2.70) следует, что в верхней полуплоскости центры полуэл­липсов находятся в точке – *ε* (см. рисунок 2.7). Уравнение (2.69) свидетельствует о том, что на оси абсцисс *(х'*= 0) движение продолжается, если *х*находится вне отрезка (*-ε*, *+ε*), и прекращается, если *х*находится внутри этого отрезка, который называется отрезком покоя.



Рисунок 2.7 - Фазовые траектории осциллятора с сухим трением

 Таким образом, в целом фазовые траектории, состоящие из отрезков эллипсов, скручиваются к отрезку покоя, и отрезок покоя представляет со­бой геометрическое место устойчивых состояний равновесия.

Построим кривую переходного процесса при начальных условиях . Решая уравнение (2.68), получаем   ; движение, начавшись в точке *1*(см. рисунок 2.7 и рисунок 2.8), будет продолжаться до тех пор, пока *х'*будет оставаться отрицательным, т. е. до момента , где *х*станет равным  (точка 2). Далее движение в соответствии с уравнением (2.70) происходит по закону                                                       (отсчет времени перенесен в точку ). При  получим  (точ­ка *3).*



Рисунок 2.8 - Кривая переходного процесса при начальных условиях 

 Продолжив построение, убедимся, что амплитуды верхних полуволн равны:  а нижних:               (см. рисунок 2.8). Линии, проведенные через вершины полу­волн, представляют собой прямолинейные лучи, в отличие от экспонент в линейном осцилляторе с вязким демпфированием. Движение прекращается внутри заштри­хованной на рисунке зоны нечувствитель­ности в тот момент, когда *х'*становится равным нулю.

Пример 2.   Осциллятор  с  переменным сухим   трением[5].    Рассмотренный выше осциллятор представляет собой нелинейное устройство, которое нельзя исследовать методами линейной теории регулирования. Но из опыта известно, что многие чувствительные механические органы регуляторов, не имеющих демпфирующих элементов с вязким трением, ведут себя примерно так же, как линейные осцилляторы с вязким трением.

Как известно, колебания коротких пружин затухают весьма быстро. При этом опыты не обнаруживают колебаний, которые изображены на рисунке 2.7, с прямолинейными огибающими амплитуд. Огибающие оказываются криво­линейными, причем довольно близкими к экспонентам. Зона застоя при этом оказывается также гораздо меньшей (практически отсутствует), чем это вытекает из предыдущего примера. При некоторых допущениях осцилляторы подобного рода можно представить как линейные.

Сила сухого трения, как известно, пропорциональна нормальному давлению, сжимающему трущиеся поверхности. По аналогии с этим допустим, что сила сухого внутреннего трения в пружинах пропорциональна напря­жениям, возникающим в сечениях пружины при ее упругих деформациях, т. е. в конечном итоге, если мы не выходим за пределы действия закона Гука, пропорциональна деформации. Вместе с тем эта сила направлена, как и обыч­ная сила кулоновского трения, навстречу движению. Тогда уравнения линейного осциллятора с переменным сухим внутренним трением можно будет записать в следующем виде:

                                                              (2.71)

где - величина переменного внутреннего трения.

Уравнения (2.71) можно переписать иначе

                                 

Таким образом, в первом и третьем квадрантах фазовой плоскости, где знаки  и  совпадают, фазовые траектории представляют собой отрезки концентричных по отношению к началу координат эллипсов с отношением вертикальной  полуоси к  горизонтальной, равным ;во втором и четвертом квадрантах это соотношение равно .

Фазовые траектории, как это видно из рисунка 2.9, скручиваются к началу координат. Таким образом, качественно фазовый портрет данного осциллятора напоминает фазовый портрет линейного осциллятора с вязким трением.



Рисунок 2.9 - Фазовый портрет осциллятора с переменным сухим трением

Аппроксимируем данный нелинейный осциллятор линейным,  поставив условием для аппроксимации совпадение периодов и амплитуд их колебаний. Амп­литуды совпадут, если фазовые траектории обоих осцилляторов будут пересекать ось абсцисс в одних и тех же точках. Нетрудно определить, что отношение амплитуд в начале и конце периода в рассматриваемом случае равно

                                                          .                                           (2.72)

Свободные колебания изображаются кривой, составленной из четвертей

синусоид с периодами  и  (см. рисунок 2.10). Период за­тухающих колебаний равен

                                           ;                          (2.73)

для обычных случаев для малых значений – 

                                                                         .                                                         (2.74)



Рисунок 2.10 - Свободные колебания нелинейного осциллятора

Для того чтобы амплитуды и периоды колебаний эквивалентной линейной системы,  описываемой  уравнением

                                             ,                                          (2.75)

совпали с амплитудами и периодами колебаний данной системы, необходимо выполнить следующие условия:

                                          ,                            (2.76)

для малых значений – :

                                                      ,                                              (2.77)

                                   ,                 (2.78)

                                            .